Análisis Funcional

Examen VIII

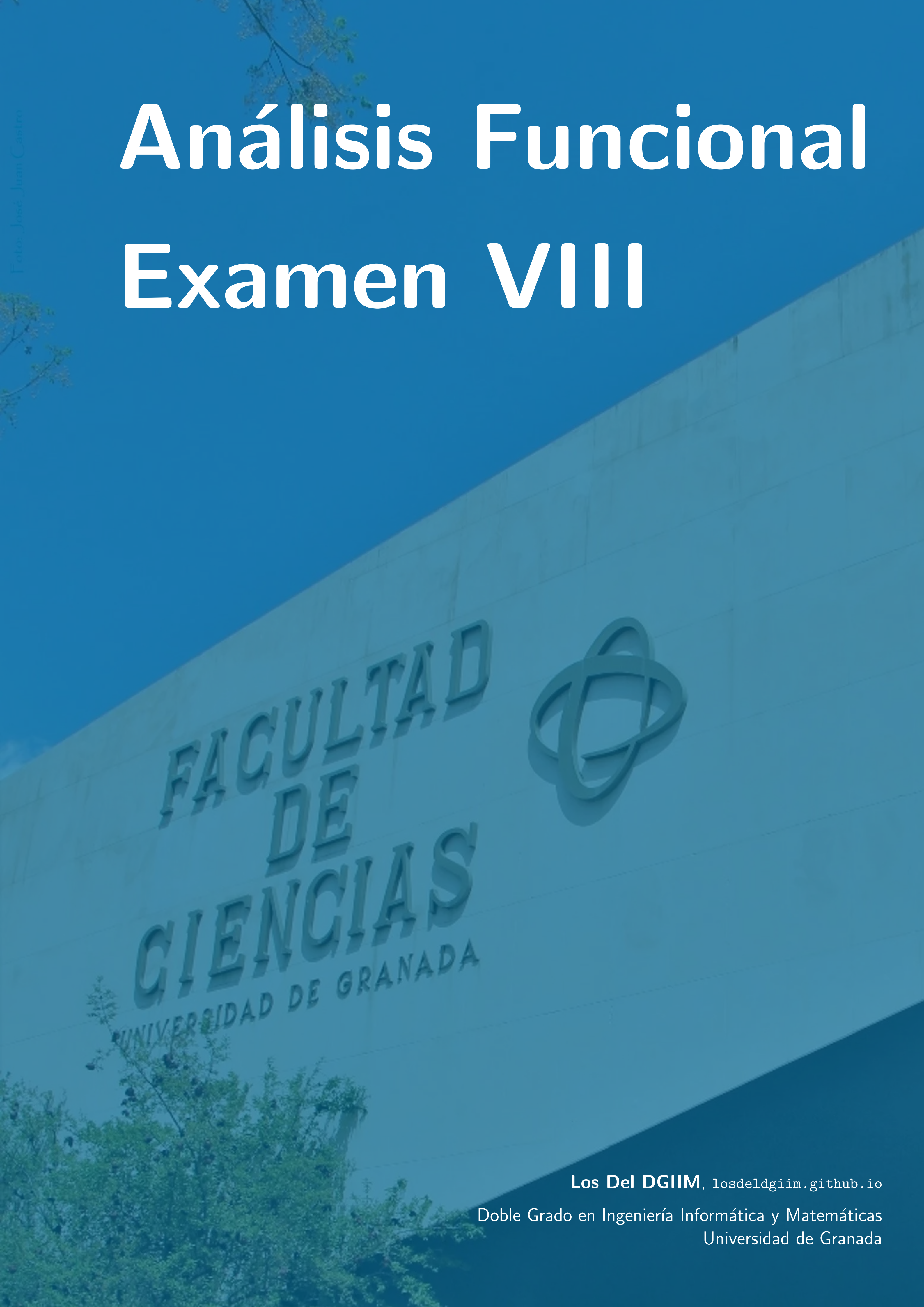

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Funcional
Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2023/24.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Parcial 2.

Fecha 19 de diciembre de 2023.

Ejercicio 1. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(X, Y)$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\mathcal{F}$ está acotado.

(ii) Para cada $x \in X$ y cada $y^* \in Y^*$ el conjunto de escalares $\{y^*(T(x)) : T \in \mathcal{F}\}$ está acotado.

Ejercicio 2. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas, indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba; cuando sean falsas, indica un contraejemplo.

(a) Todo subespacio cerrado propio de un espacio normado es igual a la intersección de los hiperplanos cerrados que lo contienen.

(b) Si X es un espacio normado M es un subespacio de X verificando que $M^\perp = \{0\} \subset X^*$, entonces $M = X$.

(c) Sean X e Y espacios de Banach. Si $T : X \to Y$ es lineal, biyectiva y abierta, entonceds T es continua.

(d) Sean X e Y espacios de Banach. Si $T : X \to Y$ es lineal y abierta y $\ker T$ es cerrado, entonces T es continua.

(e) Si X es reflexivo y $x^* \in X^*$, entonces la aplicación $x \longmapsto |x^*(x)|$ alcanza su máximo en B_X.

(f) Si X es un espacio normado y $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de elementos de X^* que converge puntualmente al funcional lineal $\varphi : X \to \mathbb{K}$, entonces $\varphi \in X^*$.

(g) L_2 es isomorfo al cociente de l_1 por un subespacio cerrado.

(h) L_1 es isomorfo un subespacio cerrado de c_0.

(i) Sea X un espacio reflexivo e Y un espacio de Banach. Si existe $T \in L(X, Y)$ sobreyectiva, entonces Y es reflexiv.

(j) La dimensión algebraica de un espacio normado es finita o no numerable.

(k) Todo espacio vectorial de dimensión infinita admite una norma completa.

Ejercicio 3. Enuncia las consecuencias principales del lema de la categoría de Baire en el Análisis Funcional, incluyendo, al menos, tres resultados que se puedan considerar teoremas y alguna aplicación a un espacio concreto. No es necesario demostrar los teoremas ni el lema de la categoría de Baire.